Оглавление

[Кинематическое моделирование и управление роботизированным мнипулятором с использованием дуальных кватернионов с единичным модулем 2](#_Toc22322778)

[1.Введение 2](#_Toc22322779)

[2.Кинематическое моделирование 4](#_Toc22322780)

[2.1. Представление положения. 4](#_Toc22322781)

[2.2. Кинематика прямого положения 4](#_Toc22322782)

[2.3. Прямая кинематика скорости 6](#_Toc22322783)

[3. Кинематическое управление 7](#_Toc22322784)

[3.1. Рабочий орган создает ошибку 7](#_Toc22322785)

[3.2. Закон управления 8](#_Toc22322786)

[3.3. Анализ устойчивости 8](#_Toc22322787)

[4. Эксперименты 9](#_Toc22322788)

[5. Выводы 10](#_Toc22322789)

[Приложение 10](#_Toc22322790)

[А. 1. Кватернионы 10](#_Toc22322791)

[А. 2. Дуальное число 11](#_Toc22322792)

[А. 3. Линии Плюккера как дуальные векторы 11](#_Toc22322793)

[А. 4. Дуальные кватернионы 12](#_Toc22322794)

[А.5. От конечного поворота к дуальному кватерниону с единичным модулем 13](#_Toc22322795)

[А. 6. От дуального кватерниона до винтовых параметров 13](#_Toc22322796)

# Кинематическое моделирование и управление роботизированным манипулятором с использованием дуальных кватернионов с единичным модулем

Основные моменты

* Кинематическое моделирование и управление положением роботизированного манипулятора с несколькими степенями свободы.
* Компактная и простая формулировка.
* Использование дуальных кватернионов с единичным модулем и их алгебры.

краткое изложение

Эта статья использует винтовое исчисление, выраженную через представление о дуальных кватернионах с единичным модулем и их алгебру, чтобы сформулировать кинематику положения (смещение + ориентация) и управление положением роботизированного манипулятора с n степенями свободы эффективным способом. Эффективность заключается в меньшем использовании компьютерной памяти, в быстром вычислении уравнений, в представлении пространства задач без сингулярностей, в устойчивости к числовым ошибкам и в компактности представлений. Формулировка проста, интуитивно понятна и проста в реализации. Мы подтвердили эту формулировку экспериментально на манипуляторе с 7 степенями свободы.

## 1.Введение

Представление положения (смещение + ориентация) с помощью дуальных кватернионов с единичным модулем (ДКЕМ, также в рамках реферата при всех дальнейших упоминаниях дуального кватерниона будут подразумеваться что его норма равна единице) получило большое внимание сообщества робототехников как для кинематического моделирования, так и для задач управления только недавно, хотя её эффективность хранения [и](#page7) вычислений по сравнению с методом, использующим матрицы однородного преобразования (МОП), была известна уже более двух десятилетий. Исследование показывает превосходящую производительность дуальных кватернионов по сравнению с МОП при кинематическом моделировании робота манипулятора с n степенями свободы, а также и при пропорциональном регулировании с недавних пор. Другими привлекательными преимуществами дуальных кватернионов являются представление, свободное от сингулярностей евклидова пространства, устойчивость к числовым ошибкам и компактность представления. Дуальные кватернионы также эффективно используется в компьютерной графике, в системах автоматизированного проектировании(САПР), в системах технического зрения, в навигации и в прочем.

Наиболее хорошо известный метод расчёта кинематики роботов основан на записях Денавита и Хартенберга (ДХ) и на однородных преобразованиях точек с использованием МОП . До сих пор все существующие методы по моделированию кинематики роботов с помощью дуальных кватернионов продолжают следовать подходу ДХ. *Мы считаем, что ДХ исходит их некоторых возможностей использования дуальных кватернионов, так как первый замысел ДХ основан на преобразовании точек с использованием МОП.*

В этой статье для кинематического моделирования мы следовали подходу винтового исчисления, основанного на линейных преобразованиях, представленных в книге Мюррея «A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation», и мы адаптировали данный материал с использованием дуальных кватернионах с единичным модулем и их алгебры, поскольку дуальный кватернион был выведен как наиболее компактный и эффективный способ описания перемещения винта. Для целей кинематического управления в качестве обобщенного пропорционального закона управления использовался логарифм погрешности дуального кватерниона, впервые введенный в работе Да-Пэн Хана, Цин Вэйя, Зе Сян Ли «кинематическое управление свободными жесткими телами с использованием дуальных кватернионов», а также анализировалась его глобальная устойчивость с точки зрения диапазонов значений параметров винта. Определение ошибки позиционирования между двумя положениями дуальных кватернионов должно быть реализовано через оператор умножения алгебры дуальных кватернионов, а не оператор вычитания, который не является правильным (хотя устойчивость закона управления доказана). В некоторых недавних работах использовали дуальные кватернионы для разработки устойчивых законов управления и для гибкого моделирования работы в коллаборативном пространстве, переходя во множество ℜ 8 для получения недостающего свойства коммутативности через операторы Гамильтона (8 × 8 матриц), но при этом теряя вычислительные преимущества алгебры дуальных кватернионов. Можно также подумать об использовании эффективной формулы поворота Родрига через положение твердого тела, представленного вектором 3D преобразования и 4D вектором поворота с параметрами оси-угла Родрига. Мы называем это представление как преобразование оси-угла ПОУ. Отметим, что ПОУ имеет особенность. Всякий раз, когда результирующий угол в ПОУ равен нулю, осевая часть представления вращения не определена. В таблице 1 перечислены требования к хранению и вычислительным затратам для описания положения твердого тела в 4 различных представлениях: матрице однородного преобразования (МОП), в дуальных кватернионах и с операторами Гамильтона (ДКЕМсОГ), в положении с параметрами Родрига (ПОУ) и в дуальных кватернионах .Хоть и для ПОУ требуется меньший объем памяти, отметим, что для него требуется на семь тригонометрических функций и одно вычисление функции с квадратным корнем больше, чем указано в Таблице 1. ПОУ также не обеспечен эффективной алгеброй.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Представление | необходимо памяти | Умножения & | сложение |
| МОП | 12 | 64× | 48+ |
| ДКЕМсОГ | 8 | 64× | 56+ |
| ПОУ | 7 | 43× | 26+ |
| ДКЕМ | 8 | 48× | 40+ |

Таблица 1. Расходы для различных представлений преобразования твердого тела.

Эта статья эффективно объединяет все преимущества теории винтов, основанной на дуальных кватернионах и их алгебре для кинематического моделирования, и позволяет управлять положением робота-манипулятора и экспериментально проверять его. Все рассмотренные выше работы по какой-то причине не уделяют внимание всем этим пунктам одновременно. Далее мы обобщим вклад этой статьи:

* Используются все преимущества (т.е. компактность, хранение, вычислительная эффективность и т. д.) представления дуальных кватернионов и их алгебры.
* Прямая задача кинематики (ПЗК), впервые, записывается в дуальном пространстве с формулой произведения экспонент (от англ. «Product of exponentials formula»POE) винтовой теории, заменяя матричные экспоненты на дуальные кватернионы. Все выражено в единой системе отсчета (т.е. в рамках базово системы координат робота). Это делает ПЗК более простой и интуитивно понятной. Следствием этого является то, что вычисление Якобиана робота становится простым и быстрым.
* Проблемы кинематического моделирования и управления положением робота манипулятора решаются компактно с меньшим количеством арифметических операций и требований к хранению, чем у многих существующих подходов, предложенных в литературе по робототехнике.
* Корректность предложенных подходов кинематического моделирования и управления подтверждена экспериментально на манипуляторе с 7 степенями свободы.
* Все параметры и уравнения объясняются четко и без какой-либо двусмысленности. Например, параметры положения точно указываются, т.е. в какой системе координат они определены и относительно какой системы координат они выражены. Документ также самодостаточен, так что можно реализовать все, что представлено здесь, без поиска какой-либо другой соответствующей справки или книги.

Остальная часть статьи идет следующим образом:

Раздел 2 объясняет представление положения (смещение + ориентация) рабочего органа, кинематику смещения положения и скорости робота; Раздел 3 сначала определяет ошибку положения, затем он предлагает закон управления для регулирования этой ошибки положения, и, наконец, он анализирует стабильность предлагаемого закона управления; Раздел 4 экспериментально подтверждает предложенную теорию кинематического моделирования и теорию управления на 7-ми осевом KUKA роботе. И наконец раздел 5 подводит итог.

Также отметим, что для лучшего понимания статьи читатель может заглянуть в приложение для получения дополнительной информации о кватернионах, дуальных числах и дуальных кватернионах

## 2.Кинематическое моделирование

### 2.1. Представление положения.

Представим смещение и ориентацию рабочего органа робота манипулятора с дуальным кватернионом с единичным модулем:

(1)

Где и соответственно двойной угол и двойной вектор с единичной величиной направленным по 3D-линии:

(2)

Выше, параметры смещения винта. угол поворота вокруг оси винта, это перемещение по той же винтовой оси, вектор направления с единичной величиной оси винта, и вектор момента оси винта, вычисленного относительно начала домашней системы координат робота манипулятора. Уравнение (1) можно переписать в терминах кватернионной пары следующим образом:

(3)

Где кватернион ориентации с единичным модулем и кватернион перемещения. Эти кватернионы ориентации и перемещения могут быть записаны с известными параметрами смещения винта как показано ниже:

(4)

(5)

Это представление компактно, быстро, устойчиво и не имеет сингулярностей.

## 2.2. Прямая задача кинематики

Здесь мы отмечаем текущие совместные значения робота-манипулятора при

и его домашней конфигурации с Затем, для простоты вычислений, сначала мы перемещаем робота в положение а затем мы перемещаем базовую систему координат в систему координат рабочего органа Таким образом, отношение положений между базовой системы координат робота манипулятора и между системой координат рабочего органа определяет дуальный кватернион, , пока

Пусть дуальный кватернион, который либо вращает, либо перемещает (или и то, и другое) систему координат рабочего органа вокруг оси винта *i*-го сустава, в то время как остальные суставные соединения заблокированы.

Другими словами, каждый из этих дуальных кватернионов с единичным модулем представляет собой относительное смещение системы координат рабочего органа от общего домашнего положения Тогда, для любого отклонения от исходной конфигурации положение рабочего органа робота манипулятора можно рассчитать, перемножив все эти дуальные кватернионы, последовательно перемещаясь по суставам:

**(6)**

Результирующий дуальный кватернион представляет собой новое положение рабочего органа манипулятора относительно , выраженного через .

Важен порядок умножения дуальных кватернионов. Он должен быть записан последовательно справа налево, начиная с последнего сустава (т. е. ближайшего к рабочему органу, например, здесь до первого сустава (т. е. ближайшего к основанию робота, например, здесь

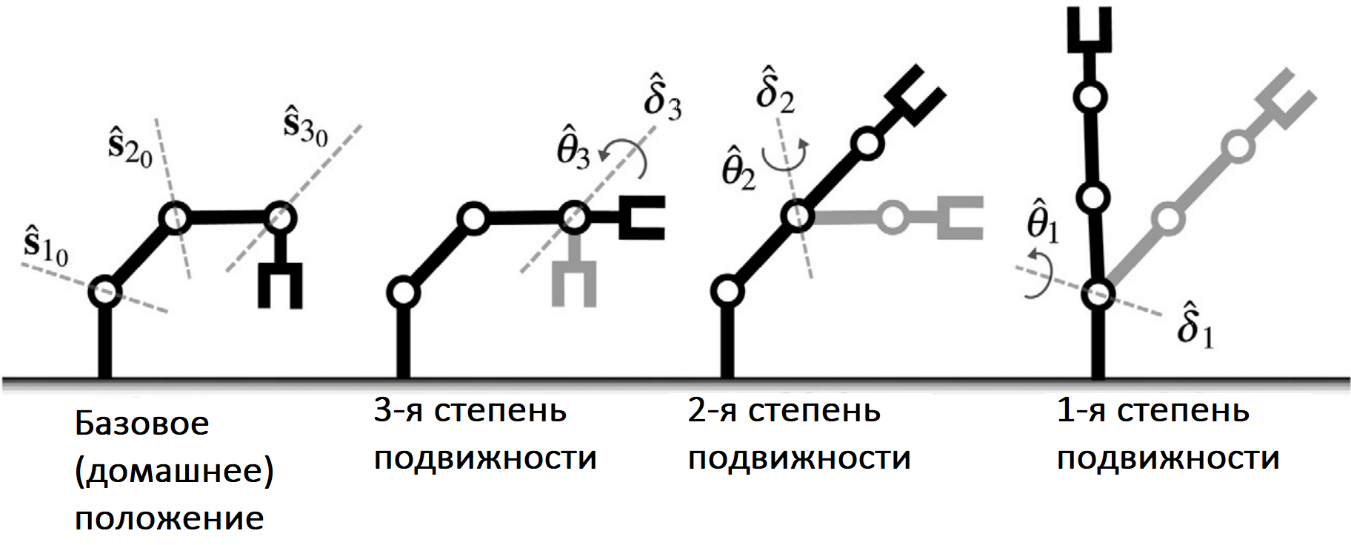


Рисунок 1. Простая иллюстрация того, как кинематика переднего положения применяется к роботу манипулятору с 3 степенями свободы.

Отныне в этом разделе, если не указано иное, все переменные выражаются относительно базовой системы координат робота

Чтобы вычислить (6), мы выражаем дуальный кватернион a следующим образом:

(7)

где дуальный угол относительное смещение сустава относительно базового положения:

(8)

Если степень подвижности вращается, то Если степень подвижности перемещается, то Дуальный вектор представляет собой ось шарнирного винта, рассчитанную в базовой конфигурации с точки зрения координат линии Плюккера:

(9)

С вектор, показывающий направление оси соединения, и с вектор момента этой оси соединения около начала координат домашней системы координат:

(10)

Здесь, представляет собой вектор положения от начала координат базовой системы координат до любой точки, лежащей на оси соединения (например, вычисляемое положение центра соединения в базовой конфигурации). Таким образом функция, измеримая относительной совместной величины и известной { в базовой конфигурации. Базовая конфигурация может быть выбрана такой, что и просты для записи. Рисунок 1 показывает, как прямая задача кинематики постепенно применяется на манипуляторе с 3 степенями свободы. на рисунке 1 самая левая форма робота выбрана в качестве домашней конфигурации, и мы хотим найти правое конечное положение рабочего органа робота по отношению к конечному положению рабочего органа робота в домашней конфигурации. Для этого мы сначала вычисляем совместные перемещения, а затем применяем дуальные кватернионные преобразования этих перемещений последовательно, начиная от последнего соединения к первому соединению.

Анализ затрат. Робот манипулятор с n степенями свободы, который использует (6) для вычисления своей кинематики переднего положения, требует:

(11)

операции умножения и сложения и блоки памяти с плавающей точкой. Например, 6-осевой робот манипулятор требует 240× и 200+ операций и 48f блоков памяти для вычисления кинематики его переднего положения.

Если бы мы использовали подход Денавита–Хартенберга для вычисления кинематики начального положения n-степенного робота манипулятора с помощью дуальных кватернионов, то нам потребовалось бы, по крайней мере больше операций умножения и сложения и блоков памяти с плавающей запятой, чем используя (11).

### 2.3. Прямая задача кинематики для нахождения скорости

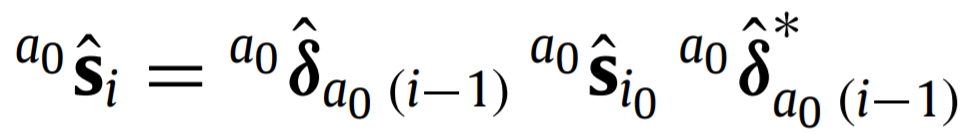
Якобиан робота манипулятора связывает скорости движений сустава со скоростью изменения положения рабочего органа:

(12)

Где сдвоенная пространственная скорость поворота системы координат рабочего органа относительно базовой системы координат выраженная в базовой системе координат робота Выше вектор поступательной скорости, а вектор скорости вращения. Матрица является дуальным пространственным Якобианом робота манипулятора, выраженная в базовой системе координат робота Двойной пространственный Якобиан есть не что иное, как двойной вектор осей шарнирного винта:

(13)

где дуальный вектор с единичным модулем выраженная в базовой системе координат робота может быть вычислен из его известных значений в домашней конфигурации, приведенной в (9) в виде:

 (14)

Где представляет полное влияние смещения предыдущих соединений на ось винта *i*-го соединения:

(15)

В (14) оператор представляет собой классический кватернионный конъюгат ассоциированного дуального кватерниона. Он используется либо для преобразования линии [15], либо для вычисления обратного положения дуального кватерниона. Заметим также, что в (14), если то

Анализ затрат. *N*-осевой манипулятор, который использует (13) для вычисления своего Якобиана через (14), требуется:

операции умножения и сложения. Например, для вычисления Якобиана 6-осевого робота манипулятора требуется 480× и 400+ операций.

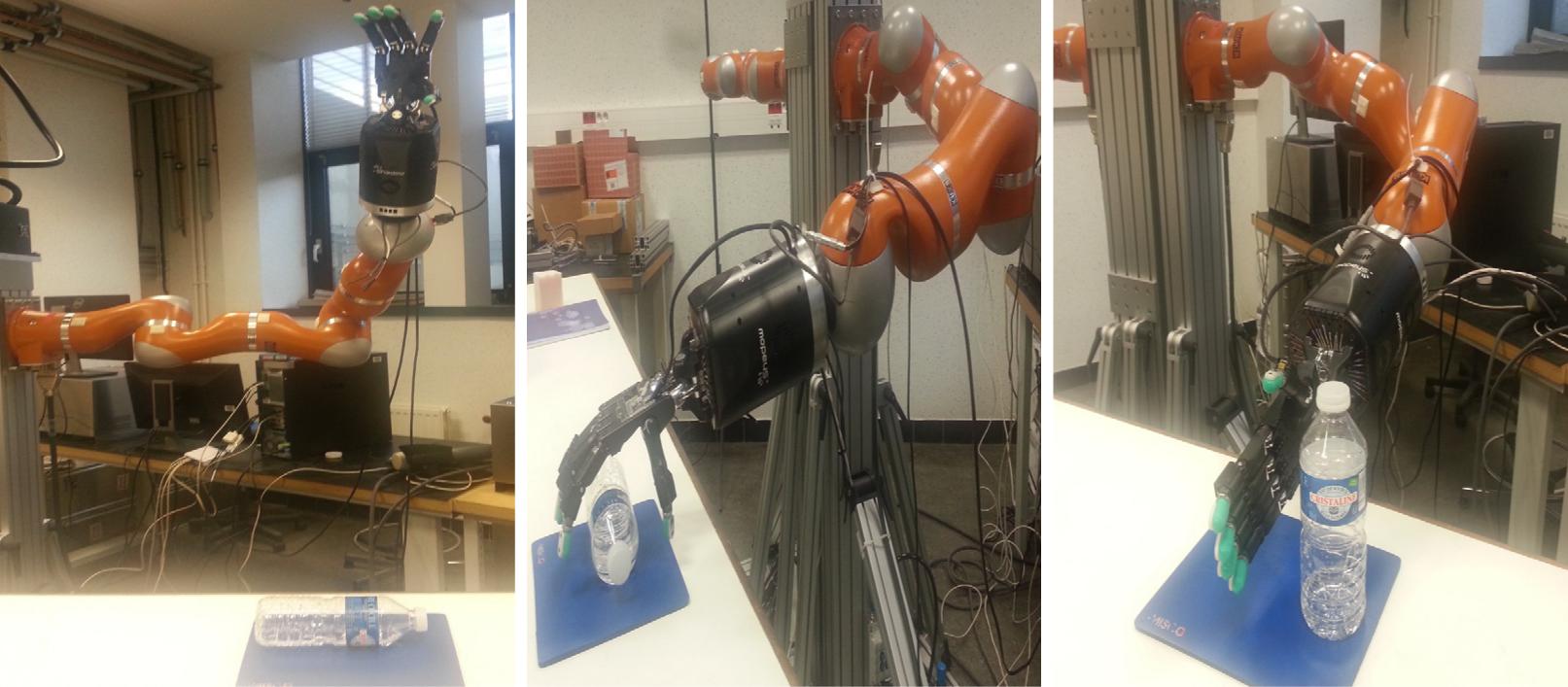
Матрично-векторное представление формы. Для вычисления кинематики обратной скорости можно переписать (12) в терминах действительных чисел, а не двойственных чисел, и поместить его в матрично-векторную форму, как показано ниже:

(17)

Где и имеют вид:

(18)

(19)



**Рис. 2**. Первоначальное положение манипулятора и бутылки (слева). Хотим достичь того, чтобы манипулятор схватил бутылку (средний). Нужно изменить положение бутылки с помощью захвата и поставить её на стол (справа).

Обратите внимание, что для 6-степенного манипулятора, который состоит только из поворотных суставов, Уравнение. (17) дает хорошо известную структуру робота Якобиана:

(20)

Теперь можно использовать линейные алгоритмы алгебры на (17) решить для общих движений.

## 3. Кинематическое управление

### 3.1. Ошибка положения рабочего органа

Определим погрешность дуальных кватернионов как разность между текущим положением рабочего органа при и желаемым положением рабочего органа при в базовой системе координат

(21)

Где текущее положение рабочего органа и обратное искомого положения рабочего органа объявление которой осуществляется посредством классического кватернион сопряженного дуального кватерниона.

### 3.2. Закон управления

Определим декартовый закон управления в дуальном пространство с точки зрения логарифма ошибки дуального кватерниона:

(22)

где λ-положительный скалярный коэффициент усиления управления.

Закон управления (22) имеет глобальное экспоненциальное поведение сходимости. Доказательство этого поведения может быть прослежено через анализ раздела 3.3. Кроме того, можно найти другое доказательство в работе Да-Пэн Хана, Цин Вэйя, Зе Сян Ли «кинематическое управление свободными жесткими телами с использованием дуальных кватернионов» для того же закона управления для случая свободных твердых тел. В остальной части этого раздела, Для простоты уравнений, мы отбросим верхние и нижние индексы переменных (например, ). Используя (1), мы можем переписать (22) как:

(23)

где {θ, d, **ℓ**, **m**} теперь параметры перемещения винта, полученные из блока ошибок дуальных кватернионов В следующем подразделе мы проанализируем устойчивость предлагаемого закона управления.

### 3.3. Анализ устойчивости

Для анализа устойчивости предложенного закона управления запишем следующую положительно определенную функцию кандидата Ляпунова:

(24)

где " ◦ " - биоператор для векторного точечного произведения между элементами объединения левого и правого дуальных кватернионов. Затем мы дифференцируем эту функцию кандидата Ляпунова V по времени, чтобы мы могли проверить е отрицательную определенность. Это дает:

(25)

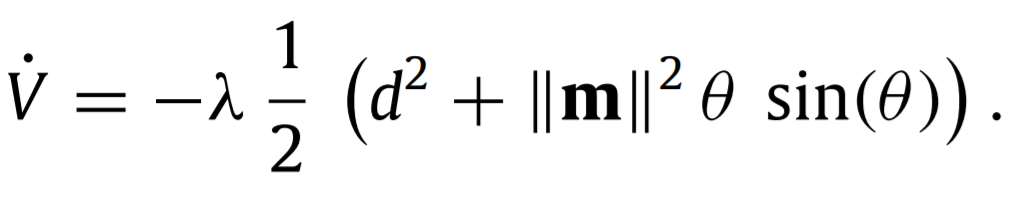
где производная от погрешности дуальных кватернионов может быть переписана в терминах угловой скорости (т. е. декартова закона управления), выраженного в базовой системе координат робота (в так называемой трехмерной системе координат) следующим образом:

(26)

Подставляя (26) В (25), получаем:

(27)

где декартов закон управления, записанный в пространстве дуальных кватернионов путем дополнения его вещественной и дуальными частями с нулевыми скалярами. Разложив (27) по параметрам винта и затем упростив его, получим следующее выражение:

 (28)

Затем, анализируя (28), мы приходим к выводу, что

Если (29)

Следовательно, если (29) справедливо и якобиан робота манипулятора (13) не обособлен, то закон управления глобально экспоненциально стабилен.

## 4. Эксперименты

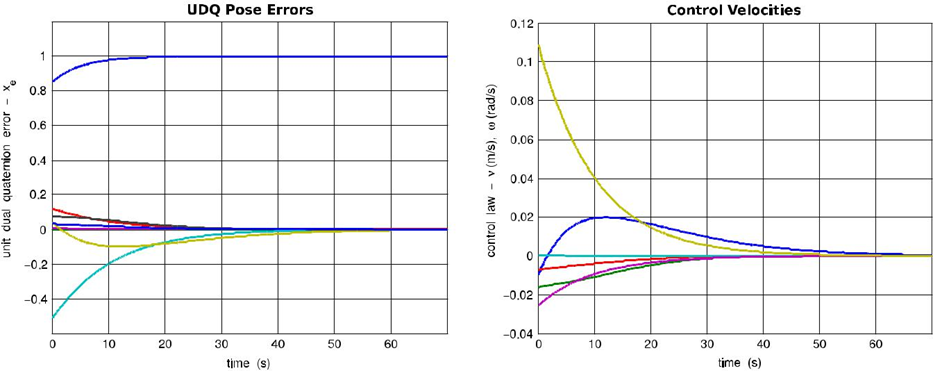
Проверим представленную формулировку на роботе манипуляторе Kuka LWR IV с семью степенями подвижности, которая оснащена противоположной рукой [22]. В эксперименте мы сначала протягиваем руку, чтобы схватить бутылку, лежащую на столе из известного положения, затем после захвата мы исправляем положение бутылки и ставим ее обратно. На рисунке 2 левое изображение показывает начальную конфигурацию робота манипулятора Kuka и в добавок противоположную руку и бутылку, лежащую на столе. На рисунке 2 среднее изображение показывает желаемое положение, достигнутое роботом манипулятором, а правое изображение показывает желаемое скорректированное положение бутылки

Рис. 3. Эволюция ошибок блока дуальных кватернионов (слева) и закон управления (справа) в зависимости от времени при достижении схвата до бутылки.

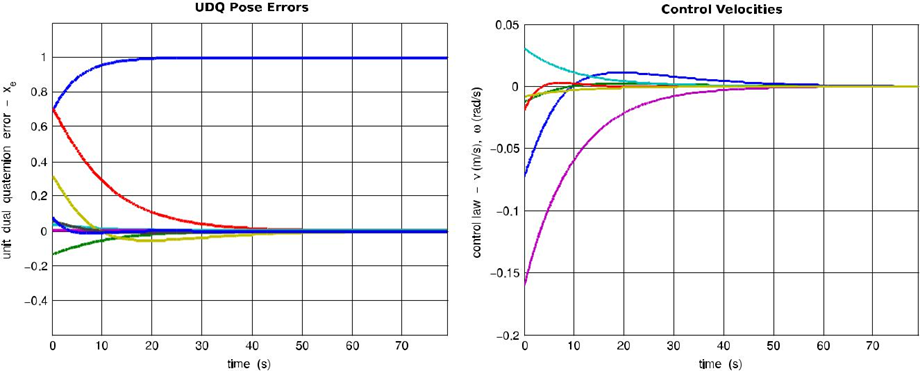


Рис. 4. Эволюция ошибок дуальных кватернионов (слева) и закон управления (справа) в зависимости от времени при установке бутылки на место с коррекцией позиции бутылки.

На рисунке 3 изображены эволюционные изменения ошибок дуальных кватернионов и закона управления в зависимости от времени при движении к нужной точке, показанной на изображении 2 в середине. На рисунке 4 изображены эволюции блоков ошибок дуальных кватернионов и закона управления в зависимости от времени при корректировке положения бутылки в сторону желаемого положения, показанного на правом изображении 2. Наконец, на рисунке 5 показаны следы декартовых поз рабочего органа, зарегистрированные во время выполнения всего манипуляционного задания. Можно наблюдать из рисунков 3 и 4, что при обеих попытках движения к бутылке и коррекции позиции задачи успешно реализованы.

## 5. Выводы

В этой статье использовались дуальные кватернионы для моделирования кинематики, а затем для управления положением робота манипулятора. Моделирование компактно и быстро. Поэтому вычисление закона управления происходит быстро. Кроме того, пространство задач не содержит сингулярностей. Эта формулировка обеспечивает важное преимущество, если использовать ее для моделирования и управления роботизированной системой, которая имеет много степеней свободы, такой как гуманоидный робот.

Эта работа может послужить основой для будущих исследований по динамическому моделированию и управлению роботизированным вооружением более компактным и эффективным способом, чем существующие методы с использованием дуальных кватернионов

## Приложение

### А. 1. Кватернионы

Ирландский математик сэр Уильям Гамильтон ввел кватернион в 1843 году в качестве геометрического оператора для отображения двух векторов в трехмерном пространстве. Под отображением он подразумевает отражение, вращение и масштабирование. Большинство программ используют только вращения. Это ограничивает кватернионы, которые имеют значения и которые используют только операцию умножения для объединения различных вращений. Множество кватернионов ℍ можно рассматривать как четырехмерное псевдовекторное пространство над вещественными числами Кватернион **q** ∈ ℍ может быть представлен вещественной скалярной частью и мнимой векторной частью

(A. 1)

Два кватерниона можно умножить друг на друга следующим образом:

(А. 2)

где векторное точечное произведение, а ’ × " - векторное поперечное произведение. Умножение кватернионов ассоциативно, но не коммутативно.

Конъюгат и норма. Конъюгат и нормой кватерниона приведены в таблице ниже:

(А. 3)

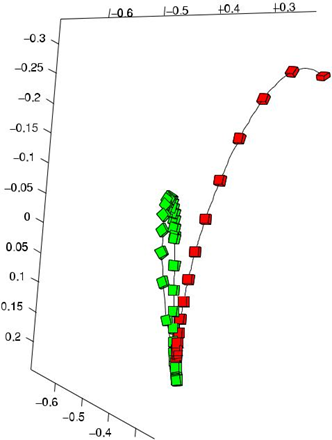


Рис. 5. Декартова траектория позиций рабочего органа при достижении схвата (красный), а затем при исправлении положения (зеленый) бутылки, чтобы положить её обратно. (Для интерпретации ссылок на цвет в этой легенде рисунка читатель обращается к веб-версии этой статьи.)

(A. 4)

Если то блок кватерниона, а также его инверсия

Вращение. Можно записать трехмерное вращение, выраженное углом вокруг вектора **ℓ** с единичным модулем в терминах кватерниона следующим образом:

(A. 5)

Чтобы повернуть мнимый кватернион (т. е. кватернион с нулевой скалярной частью) представляющий вектор в трехмерном пространстве, нужно просто до и после умножить егона кватернион и его сопряженное, соответственно:

(A. 6)

где повернутый мнимый кватернион .

### А. 2. Дуальное число

Английский математик сэр Уильям Клиффорд ввел множество дуальных чисел D и их алгебру в 1873 году. Он определил двойное число следующим образом:

(A. 7)

Где действительная часть, а дуальная часть. Геометрически дуальное число может представлять 2D вектор положения в двойной плоскости. Приведенное выше выражение можно переписать следующим образом:

(A. 8)

где модуль и аргумент для Операция умножения для двойных чисел, еще раз, дает колорит геометрического преобразования:

(A. 9)

Она масштабирует и сдвигает. Если произведение дуального числа является единицей (т. е. r = 1), то преобразование является чистым сдвигом на 2D-векторе смещения, выраженном в Дуальные числа могут также выражать плоские 2D линии и их произвольные движения с помощью полярных координатных параметров.

### А. 3. Линии Плюккера как дуальные векторы

Немецкий математик определил двойную угловую нотацию которая связывает произвольную трехмерную пространственную линию **s** с заданной трехмерной пространственной линией вращением θ вокруг единственной оси (общей нормали двух пространственных линий) и с перемещением вдоль той же оси. Рис. А. 6 (слева). Таким образом, 3-я запись Дуальных углов однозначно выражает трехмерную пространственную линию относительно осей эталонного декартова кадра. Эта 3-я запись дуальных углов дает единичное двойное векторное представление с помощью координат Плюккера:

(A. 10)

где вещественная часть орт направления линии а дуальная часть момент линии около начала координат O, ортогональный ℓ. P-произвольная точка, лежащая на прямой. Рис. А. 6 (справа). Внутреннее произведение двух единичных двойных векторов, представляющих две косые линии (например, sˆ0 и sˆ), дает Косинус двойного угла (например, ), который связывает одну линию с другой.

### А. 4. Дуальные кватернионы

Дуальныйкватернион может выражать либо положение (как ориентацию, так и перемещение), либо перемещение твердого тела в трехмерном декартовом пространстве. Жесткое тело может быть смещено путем умножения его позы на дуальный кватернион с единицей перемещения двойного кватерниона. Двойной кватернион пишется как двойное число с компонентами кватерниона:

(A. 11)

Где и кватернионы.

Умножение. Умножение двух двойных кватернионов дает следующее уравнение:

(A. 12)

Конъюгаты. Существует три различных конъюгата двойного кватерниона:

1. *Классический кватернионный конъюгат*. Он используется для преобразования 3D линии.

(A. 13)

2. *Двойной конъюгат*

(A. 14)

3.*Комбинированный конъюгат*. Он используется для 3D-преобразования точек.

. (A. 15)

Норма. Норма дуального кватерниона задается как:

(А. 16)

(А. 17)

Если

(А. 18)

тогда То есть является дуальным кватернионом с единичной длиной и его

обратное

Перемещение*.* Можно построить дуальный кватернион, чтобы выразить смещение следующим образом:

(A.19)

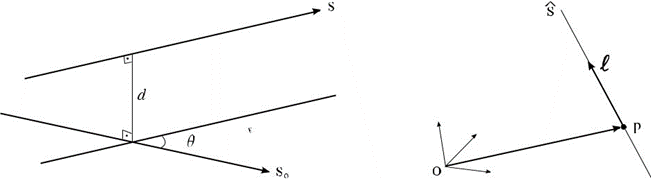


Рис. А.6. Линии- (слева): Двойной угол выражает относительное положение линии по отношению к другой линии. (Справа): Геометрия линии Плюккера.

Где кватернион, представляющий вращение, как показано в (A. 5), **1** обозначает тождественный кватернион: (1, **0**), а кватернион, описывающий перемещение с вектором **t**. левое уравнение в (A. 19) (соотв. правое уравнение) сначала переводит, затем поворачивает (соотв. вращает, а затем переводит) 3D-геометрический объект (например, точку, линию). Дуальный кватернион, который только вращается () или только переводит (), может быть записан из (A. 19) следующим образом:

(А. 20)

и, следовательно, дуальный кватернион идентичности равен Относительное смещение между двумя жесткими телами может быть вычислено путем умножения дуального кватерниона положения первого твердого тела на обратный (или сопряженный) дуальный кватернион положения второго твердого тела:

(А. 21)

или наоборот.

### А.5. От конечного поворота к дуальному кватерниону с единичным модулем

Пусть **ζ**  конечный поворот в se(3), тогда он может быть явно записан с конечным вращением и конечным переводом о геометрической винтовой линии следующим образом [28]:

(A. 22)

Затем мы можем извлечь параметры винта смещения из этого конечного поворота, как показано ниже:

(А. 23)

После этого легко написать соответствующее двойное представление кватерниона, см. (3) и (4).

### А. 6. От дуального кватерниона с единичным модулем до винтовых параметров

Пусть дуальный кватернион с и Мы можем вычислить угол поворота θ следующим образом:

(А. 24)

После этого у нас есть следующие два случая для вычисления остальных параметров винта:

*Случай, когда* и

(A.25)

(A.26)

(A.27)

*Случай, когда*